4.1 关系 2021年2月9日09点38分

定义4.1.1 令R是一个集合,如果存在其它集合是的

则称R是一个(n元)关系.特别的,当时,R是一元关系,当n=2时,R是二元关系.如果对某些集合A,则R是A上的关系,并且我们写作.

定义4.1.4 令.则R的域[domain]是集合

并且R的值[range]是集合

定义4.1.9 令且.S和R的合成[composition]是的子集,定义为

定理4.1.12 如果且,则.

定义4.1.13 令R是一个二元关系.R的逆是集合

对于一个关系S,如果,我们说R和S是逆关系.

定理4.1.15 对于任意二元关系R,和.

4.2 等价关系 2021年2月9日11点16分

定义4.2.1 令R是A上的关系.对于所有的,

当且仅当

且

当且仅当.

定义4.2.3 令R是A上的关系.

如果,则R是自反的[reflexive].

如果,则R是对称的[symmetric].

如果,则R是传递性[transitive].

定义4.2.4 令R是A上的关系.如果R是自反的,对称的且传递的,则R被称为等价关系.

定义4.2.7 令R是A上的关系且.的**类[class]**相对于R是集合

如果R是等价关系,被称为等价类.我们经常在上下文中明确的用代替.

定义4.2.10 令R是A上的等价关系. A模[modulo]R的商集[quotient set]为

定义4.2.13 令A是非空集合.族是A的一个分割当且仅当

,

,

是分段不相交的.

定理4.2.15 如果R是A上的等价关系,则A/R是A的一个分割.

4.3 偏序关系 2021年2月23日09点37分

定义4.3.1 令R是A上的关系.

如果,则R是非自反的[irreflexive].

如果,则,R是非对称的[asymmetric].

如果,则,R是反对称的[antisymmetric].

定义4.3.5 如果集合A上的关系是自反,反对称且传递,则称是上的偏序关系且有序对被称为偏序集合[partially ordered set](或简称为poset).此外,对于所有的,符合意味着但.

定理4.3.8[弱三分定理] 如果是A上的偏序关系,对于所有的,下列关系中之多有一个为真:或.

定义4.3.12 令是A上的偏序关系且.

令,如果对所有的成立,则u是B的上界.元素u是B最小上界仅当它是B的所有上界的上界,.

令,如果对所有的成立,则l是B的下界.元素l是B最大下界仅当它是B的所有下界的下界,.

定义4.3.15 令是一个偏序集合且.如果或,则a和b相对于是可比较的[comparable].A的元素是不可比较的[incomparable]仅当它们是非可比较的.

定义4.3.16 令是一个偏序集合且.

如果对于所有的,则m是A的极小元素[minimal element].

如果对于所有的,则m是A的极大元素[maximal element].

定义4.3.17 偏序集合的子集C相对于是一个链[chain]仅当a对于b是可比较的,其中.

定义4.3.20 令是一个偏序集合,如果A相对于是一个链,则是线性有序对[linearly ordered set]且被称为线性序[linear order].

定理4.3.21[三元定理] 如果是A上的偏序关系,对于所有的,下列关系中恰好有一个为真:或.

定义4.3.22 令是一个偏序集合.令,如果存在一个使得且.如果a和b是不相容的,则它们是非相容[incompatible]并且我们写作.

定义4.3.23 令是一个偏序集合,令D是的子集,对于所有的,如果,成立,则D相对于是一个反链[antichain].

定义4.3.24 令是一个偏序集合,如果A的每一个非空子集相对于都有一个最小元素,则线性序集是良好序集[well-ordered set]且是良序[well-order].

公理4.3.25 是良好序集.

定理4.3.26 如果是良序并且B是A的非空子集,则也是良序.

定义4.3.28 令是A上的偏序并且是A的子集.

B是递增的意味着暗示,其中.

B是递减的意味着暗示,其中.

定理4.3.29 不是一个良序集当且仅当没有递减子集.

定理4.3.31[除法算法] 如果且,则存在唯一的使得且.

定理4.3.32 令且均不为0.如果,则存在使得.

4.4 函数 2021年2月23日13点52分

定义4.4.1 令A和B是集合.一个关系是**函数**意味着对于所有的,

如果,则.

如果存在集合使得,则f是n元函数.如果n=1,则f是一元函数;如果n=2,则f是二元函数.

定义4.4.5 令f是一个函数.对于所有的,定义

当且仅当

并且如果,则称是未定义的.

定义4.4.13 如果A和B是集合,

定理4.4.16 函数是相等的当且仅当对所有成立.

定理4.4.20 如果和是函数使得,则是函数且.

定义4.4.23 令是一个函数且.

在C上的约束[restriction]是函数,即

如果且,则的扩展是函数.

定义4.4.26 非空集合A上的二元运算符是一个函数.

定义4.4.31 令是A上的二元运算符.

具有结合性意味着,.

具有交换性意味着,.

令,如果对所有成立,则称e是A相对于\*的单位元素.

假设A相对于\*具有单位元素e,令.如果,则称是的逆.

4.5 单射和满射 2021年2月24日09点37分

定义4.5.1 是可逆的意味着是函数.

引理4.5.2 令是可逆的.则,当且仅当对所有成立.

定理4.5.3 是可逆的当且仅当且.

定义4.5.5 函数是一对一[one-to-one]当且仅当对于所有的,

如果,则.

一对一函数有时被称为**单射[injection]**.

定理4.5.10 如果和是单射,则是单射.

定义4.5.11 函数是满射[surjection]当且仅当对于每一个,总是存在使得.

定理4.5.19 如果和是满射,则是满射.

定义4.5.21 如果函数既是单射又是满射,我们称它为双射[bijection].

定理4.5.22 一个函数是可逆的当且仅当它是双射.

定理4.5.23 如果和是双射,则和是双射.

定义4.5.24 令R是A上的关系,令S是B上的关系.

令是一个函数,如果对所有的,满足

当且仅当.

则称是保序[order-preserving]函数,并且我们说在S上保守R.

保序双射是序同构[order isomorphism].

是上的序同构,如果存在一个序同构在S上保守R,则我们写作.如果并且关系R和S在上下文中是明确的,我们写作.有时当和具有相同的序同构时,我们称它们具有相同的序类型[order type].

定理4.5.26 在S上保守R的序同构的逆是一个在R上保守S的序同构.

定理4.5.27 如果一个序同构在S上保守R且另一个序同构在T上保守S,则是一个在T上保守R的同构.

定义4.5.29 令,如果是一个序同构,则被称为嵌入[embedding].

4.6 图像和逆图像 2021年2月24日11点13分

定义4.6.1 令是一个函数且.则C(在下)的图像是

定义4.6.2 令是一个函数且.则D(在下)的逆图像是

定理4.6.5 令是一个函数且,.

.

.

.

.

定理4.6.7 令是一个集合族.则

定理4.6.8 令是一个函数.假设,.

如果是一对一,则.

如果是满射,则.

定理4.6.9 令是一个函数.

如果对所有成立,则是单射.

如果对所有成立,则是满射.